PART3　3 辺の長さが等しい四面体の高さと体積

3　PA = PB = PC = 4, AB = BC = CA = 6 である四面体PABCの体積 V を求めよ。

Point Pickup

図形の対称性を利用し，ある頂点から対面に下ろした垂線の長さを高さとして求める。

第 10 講　PART3 確認問題

1　$PA=PB=PC=\sqrt{7}$，$AB=BC=CA=2\sqrt{3}$ である四面体 PABC について，$\triangle ABC$ を底面としたときの高さ h と体積 V を求めよ。

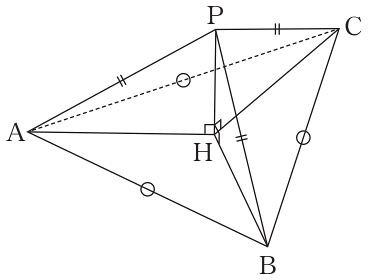
$h=\sqrt{\boxed{ア}}$

$V=\boxed{イ}$

PART3　3 辺の長さが等しい四面体の高さと体積

3　$PA=PB=PC=4$, $AB=BC=CA=6$ である四面体PABCの体積 V を求めよ。

頂点 P から △ABC に垂線 PH を下ろすと，直線 PH は平面 ABC 上のすべての直線と垂直である。



△PAH，△PBH，△PCH について

$$\angle PHA=\angle PHB=\angle PHC=90^\circ$$

$$PA=PB=PC$$

PH は共通

であるから　△PAH ≡ △PBH ≡ △PCH

よって　$AH=BH=CH$

したがって，点 H は △ABC の外接円の中心であり，AH, BH, CH はその外接円の半径である。

△ABC で正弦定理より

$$2AH=\frac{6}{\sin 60^\circ}$$

よって

$$AH=\frac{1}{2}\times 6\div\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$$

したがって，△PAH で三平方の定理より

$$PH=\sqrt{PA^2-AH^2}=\sqrt{4^2-(2\sqrt{3})^2}=2$$

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6\sin 60^\circ=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=9\sqrt{3}$$

以上より，四面体 PABC の体積 V は

$$V=\frac{1}{3}\cdot\triangle ABC\cdot PH=\frac{1}{3}\cdot 9\sqrt{3}\cdot 2=6\sqrt{3}$$

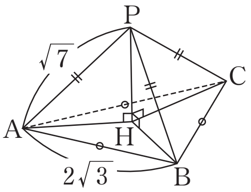
第10講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：3，イ：3

[解説]

頂点 P から△ABC に垂線 PH を下ろすと，直線 PH は平面 ABC 上のすべての直線と垂直である。



△PAH，△PBH，△PCH について [A]

$$\angle PHA = \angle PHB = \angle PHC = 90^\circ$$

$$PA = PB = PC$$

PH 共通

であるから　$\triangle PAH \equiv \triangle PBH \equiv \triangle PCH$ [B]

よって　$AH = BH = CH$

したがって，点 H は△ABC の外接円の中心であり，AH，BH，CH はその外接円の半径である。

△ABC で正弦定理より　$2AH = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}$ [C]

よって　$AH = \dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3} \div \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2$

ゆえに，△PAH で三平方の定理より

$$PH = \sqrt{PA^2 - AH^2} = \sqrt{(\sqrt{7})^2 - 2^2} = \sqrt{3}$$

高さ $h = PH$ であるから　$h = \sqrt{3}$

また

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}\sin 60^\circ$$

$$= 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

したがって，四面体 PABC の体積 V は

$$V = \frac{1}{3}\cdot\triangle ABC\cdot PH = \frac{1}{3}\cdot 3\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = 3$$

[A]　四面体 PABC の対称性を利用する。すなわち，PA＝PB＝PC であることや，底面の △ABC が正三角形であることを利用する。

[B]　直角三角形の合同条件「斜辺と他の 1 辺が等しい」による。

[C]　△ABC は正三角形であるから，1 つの内角は 60°